ΠΡΟΤΑΣΗ 11.3.3

$a \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{T}, a \in U \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(=>) (Με Άτοπο)

Ας είναι $a \in \bar{A}$. Υποθέτω ότι $\left.\begin{matrix} \exists U \in \mathcal{T} \\ a \in U \end{matrix}\right\} \Rightarrow U \cap A = \emptyset$

Όμως $\left.\begin{matrix} U \cap A = \emptyset \Rightarrow A \subseteq U^c \\ \bar{A} \subseteq U^c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \in \bar{A} \Rightarrow a \in U^c$ με $a \in U$ Άτοπο

(<=) Έστω $a \notin \bar{A} \Rightarrow a \in (\bar{A})^c \in \mathcal{T}$ και συνεπώς, με την υπόθεση $U \cap A \neq \emptyset$ Αντ. $\emptyset = (\bar{A})^c \cap A \neq \emptyset$ Άτοπο

Αν $x \in A$, τότε $x \in \bar{A}$, όπου $\bar{A} \supseteq A$. Δεν γίνεται να ανήκει στο συμπλήρωμα της $\bar{A}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.6.2

$(a_\nu) \in X$, $a_\nu \to \ell \Rightarrow \ell \in \bar{X}$

- Τα όρια (αν ∃) μιας ακολουθίας θα ∃ μέσα στην θήκη.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $(a_n) \in X$ με $a_\nu \to \ell \in E$, $U \in \mathcal{T}$ με $\ell \in U$, από ορισμό $(a_\nu \to \ell)$ έπεται ότι $\exists \nu_0 \in \mathbb{N}$, $a_\nu \in U$ $\forall \nu \geq \nu_0 \Rightarrow U \cap X \neq \emptyset$. Άρα $\ell \in \bar{X}$.

(*) $a_\nu \in E$, $\nu \in \mathbb{N}$, $A = \{a_\nu : \nu \in \mathbb{N}\}$. Ας είναι $a_{k\nu} \to \ell_k \in E$, τότε $\ell_k \in \bar{A}$

Δηλαδή, η $\bar{A}$ περιέχει και όλα τα όρια των υπακολουθιών ($\ell_k \notin A$ απαραίτητα)

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.6.4

$(X, \mathcal{T})$ τ.χ. 1ης αριθμησιμότητας.

$\mathcal{B}_x = \{(B_1, \dots, B_n)\ B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots\}$

$\ell \in \bar{X} \Leftrightarrow \exists a_\nu \in X$ με $a_\nu \to \ell$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

($\Leftarrow$) Από 11.6.2

($\Rightarrow$) Ας είναι $\ell \in \bar{X}$, $a_i \in X \cap B_i \neq \emptyset$ ... κ.ω.

* $a \in A'$ $\forall U \in \mathcal{T}$, $a \in U \Rightarrow A \cap U^* \neq \emptyset$, όπου $U^* = U \setminus \{a\}$

Να περιέχει δηλαδή και άλλα στοιχεία, διαφορετικά του x.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

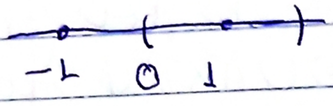
Η Πρόταση 11.3.3 και το παραπάνω * και τα δύο έχουν ανοιχτά σύνολα. Η διαφορά τους είναι ότι η 11.3.3 έχει το $\{a\}$ μέσα ενώ το * δεν μας ενδιαφέρει αν θα περιέχει το $\{a\}$ ή όχι

a σημείο συσσώρευσης μιας $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$.

$\exists a_{k_n}$ τ.ω. $a_{k_n} \to a$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$(-1)^\nu \to 1$, $(-1)^\nu \to -1$



$\{-1, 1\} = A$

Η ακολ. $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} = (-1)^\nu$ έχει σ.σ. τα $1, -1$, αλλά το σύνολο A δεν έχει σημεία σ.σ. καθώς

$[(0,1) \cup (1,2)] \cap \{-1, 1\} = \emptyset$

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.3.4 (Αποδ όπως στους μετρικούς)

i) $(A^\circ)^c = \overline{A^c}$

ii) $(A\cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ // $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cup\overline{B}$

iii) $\text{ext}\,A = (A^c)^\circ = \overline{A}^c$

iv) ⊛ $\partial A = \overline{A} - A^\circ = \overline{A}\cap (A^\circ)^c = \overline{A}\cap \overline{A^c}$

- $\overline{(A^c)^c} \cap \overline{A^c} = \partial A^c$

$\partial A = \overline{A} - A^\circ$ κ' $A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A} \Rightarrow A^\circ \cap \partial A = \emptyset$

v) $A' \subseteq \overline{A}$ (τα σ.σ. είναι μέσα στη θήκη)

$A' \subsetneq \overline{A}$ π.χ. ένα μονοσύνολο $A = \{1\} = \overline{A}$, $A' = \emptyset$

ΟΡΙΣΜΟΣ

- Ας είναι $(E_1, \mathcal{T}_1) \to (E_2, \mathcal{T}_2)$ δύο τοπολογικοί χώροι και μια συνάρτηση $f:(E_1,\mathcal{T}_1)\to(E_2,\mathcal{T}_2)$

Η συνάρτηση f θα λέγεται συνεχής αν $\forall A\in\mathcal{T}_2$ ισχύει $f^{-1}(A)\in\mathcal{T}_1$.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Η συνάρτηση $f:(E_1,\mathcal{T}_1)\to(E_2,\mathcal{T}_2)$ είναι συνεχής αν-ν $\forall$ κλειστό υποσύνολο K του E_2, το σύνολο $f^{-1}(K)$ είναι κλειστό υποσ. του E_1.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

($\Rightarrow$) f συνεχής. Ας είναι $K\subseteq E_2$ κλειστό. Θ.δ.ο. $f^{-1}(K)\subseteq E_1$ κλειστό

Αρκεί ν.δ.ο. $(f^{-1}(K))^c \in \mathcal{T}_1$ ... κλπ.

($\Leftarrow$) Έστω K κλειστό στην $\mathcal{E}_2$, $K \subseteq \mathcal{E}_2 \Rightarrow K^c$ ανοιχτό

$K^c \subseteq \mathcal{E}_2 \Rightarrow A^c \in \mathcal{T}_2$

$f^{-1}(A)$ κλειστό $f^{-1}(A) \subseteq \mathcal{E}_1 \Rightarrow (f^{-1}(A))^c$ ανοιχτ. υπόσ. $\mathcal{E}_1$.

$(f^{-1}(A))^c = f^{-1}(A^c)$, $f^{-1}(A^c) \in \mathcal{T}_1$

Η.Ω. (το αποδ.)

$A^c = B \in \mathcal{T}_2 \Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_1$ συνεχής.

ΠΡΟΤΑΣΗ 12.1.2

Ας είναι $(\mathcal{E}_1, \mathcal{T}_1) \to (\mathcal{E}_2, \mathcal{T}_2)$ τ.χ. και $f:(\mathcal{E}_1, \mathcal{T}_1) \to (\mathcal{E}_2, \mathcal{T}_2)$ μια συνάρτηση. ΤΑΕΙ

i) Η f είναι συνεχής

ii) $\forall$ υποβάση $\mathcal{A}$ της $\mathcal{T}_2$ και $\forall A \in \mathcal{A}$ ισχύει $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_1$

iii) $\forall$ βάση $\mathcal{B}$ της $\mathcal{T}_2$ και $\forall B \in \mathcal{B}$ ισχύει $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_1$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) $\Rightarrow$ ii) $\mathcal{A} \subseteq P(\mathcal{E})$ $A_{T\mathcal{E}} = \mathcal{T}_2(\mathcal{A}) = \mathcal{T}_2 \Rightarrow A_\mathcal{E} \in \mathcal{T}_2 \Rightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_1$

ii) $\Rightarrow$ iii) $\mathcal{B}$ βάση της $\mathcal{T}_2$ $B_\mathcal{E} = \mathcal{T}_2 \Rightarrow B \in \mathcal{T}_2 \overset{f \text{ συν.}}{\Longrightarrow} f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_1$.

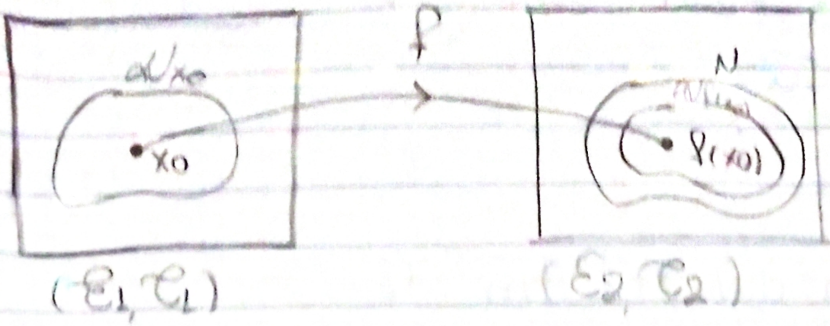
iii) $\Rightarrow$ i) Βιβλίο.

ΠΡΟΤΑΣΗ 12.1.3

Ας είναι $(\mathcal{E}_1, \mathcal{T}_1)$ $(\mathcal{E}_2, \mathcal{T}_2)$ τ.χ. και $f:(\mathcal{E}_1, \mathcal{T}_1) \to (\mathcal{E}_2, \mathcal{T}_2)$ μια συνάρτηση. Η f είναι συνεχής αν-ν $(\forall x \in \mathcal{E}_1)(\forall V \in \mathcal{U}_{f(x)})\, f^{-1}(V) \in \mathcal{U}_x$

Ορισμός

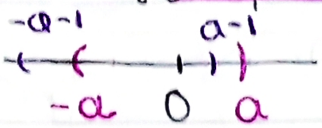
Λέμε ότι η συνάρτηση $f:(E_1,\tau_1)\to(E_2,\tau_2)$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0\in E_1$ αν $(\forall N\in\mathcal{N}(f(x_0)))$, $f^{-1}(N)\in\mathcal{N}_{x_0}$



Παράδειγμα 1

$f:(\mathbb{R},\tau)\to(\mathbb{R},\tau)$

$\tau=\{(-a,a):a>0\}\cup\{\emptyset,\mathbb{R}\}$ και $f(x)=x+1$ $(x\mapsto x+1)$



Επομένως, $f^{-1}:(-a-1,\ a-1)$.

Άρα $f^{-1}\notin\tau$, f όχι συνεχής στο τ

Παράδειγμα 2

$g:(\mathbb{R},\tau)\to(\mathbb{R},\tau)$ με $\tau=\{(-a,a):a>0\}\cup\{\emptyset,\mathbb{R}\}$

και $g(x)=-x$ $(x\mapsto -x)$

Επομένως, $g^{-1}:(-a,a)$

Άρα $g^{-1}\in\tau$, g συνεχής στην τ

Παράδειγμα 3

$g:(\mathbb{R},\tau)\to(\mathbb{R},\tau)$

$\tau_1=\{[0,b):b>0\}\cup\{\emptyset,\mathbb{R}\}$ και $g(x)=-x$

$g^{-1}:(-b,0]\notin\tau_1$, άρα g όχι συνεχής στην τ_1

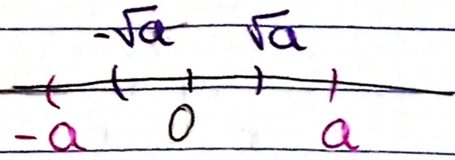
Παράδειγμα 4 Π.Ω.

Εξετάστε αν η απεικόνιση $h:(\mathbb{R},\mathcal{T})\to(\mathbb{R},\mathcal{T})$

$(\mathbb{R},\mathcal{T}_1)\to(\mathbb{R},\mathcal{T}_1)$

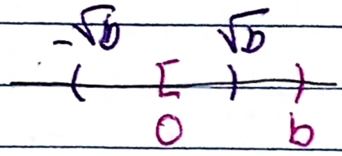
με $h(x)=x^2$ είναι συνεχής στην $\mathcal{T}$ και στην $\mathcal{T}_1$

$h:(\mathbb{R},\mathcal{T})\to(\mathbb{R},\mathcal{T})$



$h^{-1}:(-\sqrt{a},\sqrt{a})$, $h^{-1}\in\mathcal{T}$ άρα συνεχής στην $\mathcal{T}$

$h:(\mathbb{R},\mathcal{T}_1)\to(\mathbb{R},\mathcal{T}_1)$



$h^{-1}:(-\sqrt{b},\sqrt{b})$, $h^{-1}\notin\mathcal{T}_1$, άρα h όχι συνεχής στην $\mathcal{T}_1$

Παράδειγμα 5

Ας θεωρήσουμε δύο τοπ. χώρους $(E_1,\mathcal{T}_1)$ και $(E_2,\mathcal{T}_2)$, όπου

$E_1=\{x_1,x_2,x_3\}$, $\mathcal{T}_1=\{\emptyset,E_1,\{x_1\},\{x_1,x_3\}\}$

$E_2=\{y_1,y_2,y_3\}$, $\mathcal{T}_2=\{\emptyset,E_2,\{y_1\},\{y_2\},\{y_1,y_2\}\}$ και απεικόνιση

$f:E_1\to E_2$ τ.ω. $f(x_1)=y_1$

$f(x_2)=y_3$

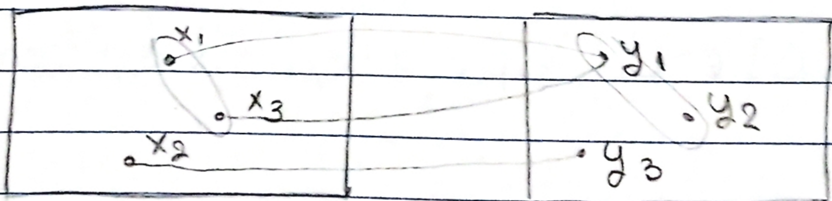
$f(x_3)=y_1$

$f^{-1}(\emptyset)=f^{-1}(\{y_2\})=\emptyset$

$f^{-1}(\{y_1\})=f^{-1}(\{y_1,y_2\})=\{x_1,x_3\}$

$f^{-1}(E_2)=E_1$

Επομένως, $\forall A\in\mathcal{T}_2$, $f^{-1}(A)\in\mathcal{T}_1$ Άρα f συνεχής.



$(E_1,\mathcal{T}_1)$ $(E_2,\mathcal{T}_2)$